ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-199-216

Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи плоскости [1]

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом шаре с радиально-неоднородным упругим покрытием, находящемся вблизи плоскости. Полагается, что тело помещено в идеальную жидкость, подстилающая плоская поверхность является абсолютно жесткой или абсолютно мягкой, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями.

Задача сведена к задаче дифракции на двух телах. Согласно методу мнимых источников граница раздела сред заменена на зеркально отображенный мнимый шар, находящийся в поле двух плоских волн. Получено аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на двух одинаковых однородных упругих шарах с радиально-неоднородными покрытиями, находящихся в безграничной идеальной жидкости. Для решения задачи использована теорема сложения для сферических волновых функций. Получено аналитическое описание волновых полей в содержащей среде и однородных упругих телах в виде разложений по сферическим функциям, а для нахождения полей смещений в неоднородных покрытиях шаров построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. На основе решения задачи дифракции плоской волны на двух телах записано решение дифракционной задачи в случае рассеяния второй плоской волны. Путем суммирования результатов решения двух дифракционных задач получено аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности.

С помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий шар, неоднородное покрытие.

Библиография: 24 названий.

Для цитирования:
Л. А. Толоконников. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи плоскости // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 199–216.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-199-216

Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere with an non-uniform coating located near a plane

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

In paper the problem of diffraction of a plane sound wave by a homogeneous elastic sphere with radially non-uniform elastic coating located near a plane. It is necessary that the body is placed in an ideal fluid, the spreading flat surface is absolutely rigid and absolutely soft, heterogeneity laws of a coating material are described by continuous functions.

The problem is replaced by a problem of diffraction on two bodies. According to a method of imaginary radiants the dividing boundary of mediums is substituted by with mirrorly mapped imaginary sphere which is situated in the field of two plane waves. The analytical solution of the problem of diffraction of a plane sound wave by two identical homogeneous elastic spheres with radially non-uniform coatings situated in an ideal unlimited fluid is received. For solution of the problem the addition theorem for spherical wave functions is used. Analytic expressions In the form of decomposition on spherical functions are obtained which describe the wave fields in the containing medium and the homogeneous elastic bodies. The boundary-value problem for the system of ordinary differential equations of the second order is constructed for determination of the displacement fields in non-uniform coatings. On the basis of solution of problem of diffraction a plane wave by two bodies the diffraction problem for case of scattering of second plane wave is received. By summation of results of solutions of two diffraction problems the analytical solution of the problem of diffraction of a plane sound wave by a elastic sphere with coating located near a plane is received.

By means of an continuous-non-uniform elastic coatings it is possible to change effectively scattering performances of bodies in determinate directions if to pick up corresponding the inhomogeneity laws for mechanical parametres of a coating.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic sphere, non-uniform coating.

Bibliography: 24 titles.

For citation:
L. A. Tolokonnikov, 2018, Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere with an non-uniform coating located near a plane" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 199–216.

1. Введение

Многие реальные объекты хорошо аппроксимируются телами сферической формы. Исследованию дифракции звуковых волн на упругих сферических телах, находящихся в безграничной жидкости, посвящена обширная литература. Дифракция звуковых волн на однородных изотропных упругих сплошных шарах и сферических оболочках изучалась, например, в работах [1-5]. В работе [1] рассмотрено рассеяние плоских волн сплошным шаром. В [2] изучено рассеяние плоской волны тонкой сферической оболочкой, описанной по безмоментной теории. В [3] для анализа рассеяния звука шаром использована теория резонансного рассеяния. Задача дифракции плоской звуковой волны на сферической оболочке произвольной толщины, описанной по трехмерной теории упругости, решена в [4]. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической полостью исследована в [5]. В [6] рассмотрено рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном изотропном термоупругом полом шаре, помещенном в невязкую теплопроводную жидкость, изучена в [7].

Изменение звукоотражающих свойств упругих тел можно осуществить с помощью непре рывно-неоднородных покрытий, подбирая соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Работы [8-13] посвящены изучению влияния покрытий сферических упругих тел на их звукоотражающие свойства. В работах [8-10] решены задачи дифракция плоской, сферической и цилиндрической звуковых волн на упругом шаре с радиально-неоднородным покрытием. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с непрерывно-неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью рассмотрена в [11]. В [12] осуществлено моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами. В [13] показана возможность моделирования непрерывно-неоднородного по толщине покрытия шара системой однородных упругих слоев.

В упомянутых выше работах полагалось, что упругие тела помещены в безграничное пространство. Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле является значительным. В известных работах, посвященных изучению рассеяния звука сферическими телами, находящимися вблизи границ раздела сред, рассматривались рассеиватели, не имеющие покрытий. Рассеяние плоской звуковой волны абсолютно жесткой сферой в присутствии абсолютно мягкой или абсолютно жесткой плоской поверхности исследовано в [14, 15]. В [16] методом Т-матриц решена задача о рассеянии плоской звуковой волны упругой сферической оболочкой, находящейся вблизи границы раздела сред жидкость-упругое полупространство. В [17] численно исследовано рассеяние звука жесткими и мягкими сферами в присутствии плоской поверхности. Дифракция звуковых волн, излучаемых точечным источником, на импедансной сфере вблизи ипмедансной плоскости исследована в [18]. Дифракция звука на упругой или импедансной сфере, расположенной вблизи импедансной или упругой границы полупространства, рассмотрена в [19].

Задачи дифракции звука на сферических телах с неоднородными покрытиями в присутствии ограничивающих поверхностей представляют значительный теоретический и практический интерес. С математической точки зрения такие задачи являются существенно более сложными по сравнению с дифракционными задачами для тел, расположенных в безграничной среде.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом шаре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный упругий шар радиусом r_0. Материал шара характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0. Шар имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с модулями упругости λ и μ. Внешний радиус покрытия r_1. Шар находится в полупространстве, заполненном идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c, вблизи плоской поверхности Γ, которая является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Расстояние от центра шара до плоскости равно d $(d > r_1)$.

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время. При рассеянии звука шаром возникают многократные переотражения между телом и плоскостью.

Определим акустическое поле, рассеянное шаром с неоднородным покрытием в присутствии плоскости.

3. Сведение задачи к задаче дифракции на двух телах

В качестве основной системы отсчета возьмем прямоугольную декартову систему координат (x, y, z) с началом в точке O, лежащей на плоскости Γ. При этом оси x и y расположены на плоскости, ось z — перпендикулярна Γ, центр шара находится на оси z.

Потенциал скорости падающей плоской волны, распространяющейся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_1$, в основной системе координат имеет вид

$$\Psi_{01} = A \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) - \omega t)],$$

где A — амплитуда волны; $\mathbf{k_1} = \{k \sin\theta_0 \cos\varphi_0,\ k \sin\theta_0 \sin\varphi_0,\ k \cos\theta_0\}$; $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны.

В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Потенциал скорости полного акустического поля

$$\Psi = \Psi_{01} + \Psi_s,$$

где Ψ_s — потенциал скорости волны, рассеянной шаром и плоскостью.

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в содержащей жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

Если плоскость Γ является абсолютно жесткой, то граничные условия на ней заключаются в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

Если плоскость Γ является акустически мягкой, то граничные условия на ней заключаются в равенстве нулю акустического давления

$$\Psi|_{z=0} = 0.$$

Сведем поставленную задачу к задаче дифракции звука на двух одинаковых телах. Для этого исключим плоскую границу раздела сред, вводя зеркально отраженный от нее рассеивающий объект и вторую падающую плоскую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_2$. Причем вектор $\mathbf{k}_2$ является зеркальным отражением вектора $\mathbf{k}_1$ относительно плоскости Г, $\mathbf{k}_2 = \{k\sin\theta_0\cos\varphi_0,\ \ k\sin\theta_0\sin\varphi_0,\ \ -k\cos\theta_0\}$.

Чтобы граничные условия на плоскости Г (при $z = 0$) удовлетворялись автоматически, потенциал скорости второй падающей плоской волны должен быть равен

$$\Psi_{02} = A\exp[i(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r})],$$

если плоскость Г абсолютно жесткая, и

$$\Psi_{02} = -A\exp[i(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r})],$$

если плоскость Г абсолютно мягкая.

Таким образом, исходную задачу свели к задаче дифракции двух плоских волн с потенциалами скорости Ψ_{01} и Ψ_{01} на двух одинаковых упругих шарах с неоднородными покрытиями, находящихся в безграничном пространстве, заполненном однородной идеальной жидкостью. Так как рассматриваемая задача является линейной, то следует найти решение задачи дифракции каждой из двух плоских волн на двух сферических телах, а затем полученные результаты просуммировать.

Потенциал скорости полного акустического поля будет равен

$$\Psi = \Psi_{01} + \Psi_{02} + \Psi_{s1} + \Psi_{s2},$$

где Ψ_{s1} и Ψ_{s2} — потенциалы скорости рассеянных двумя шарами первой и второй плоских волн соответственно.

4. Аналитическое решение задачи дифракции плоской волны на двух шарах с покрытиями

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны с потенциалом скорости Ψ_{01} на двух одинаковых однородных упругих шарах радиусом r_0 с радиально-неоднородными покрытиями, внешний радиус которых r_1. Расстояние между центрами шаров $2d$.

Наряду с основной системой координат (x, y, z) введем локальные прямоугольные декартовы системы координат (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}) и (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}), связанные с шарами, находящимися в верхнем $(z > 0)$ и нижнем $(z < 0)$ полупространствах соответственно. Оси локальных координатных систем одинаково ориентированы с соответствующими осями основной системы координат. При этом центры локальных систем координат O_{+1} и O_{-1} находятся в центрах шаров и лежат на оси z.

Свяжем с основной и локальными прямоугольными системами координат сферические системы координат (r, θ, φ), $(r_{+1}, \theta_{+1}, \varphi_{+1})$, $(r_{-1}, \theta_{-1}, \varphi_{-1})$ соответственно. В локальных сферических координатах уравнения внутренней и внешней поверхностей покрытия l – го шара имеют вид $r_l = r_0$ и $r_l = r_1$ соответственно $(l = \pm1)$.

Полагаем, что модули упругости λ и μ материала покрытия l – го шара описываются дифференцируемыми функциями сферической радиальной координаты r_l, а плотность ρ — непрерывной функцией координаты r_l $(l = \pm1)$: $\lambda = \lambda(r_l)$, $\mu = \mu(r_l)$, $\rho = \rho(r_l)$.

Определим акустическое поле, рассеянное шарами.

Потенциал скорости полного акустического поля Ψ_1 представим в виде

$$\Psi_1 = \Psi_{01} + \Psi_{s1}. \tag{1}$$

При этом скорость частиц жидкости $\mathbf{v}_1$ и акустическое давление p_1 во внешней среде определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \mathrm{grad}\Psi_1, \quad p_1 = i\rho_1\omega\Psi_1.$$

Так как $\mathbf{r} = \mathbf{r}_l + \mathbf{r}_{Ol} \quad (l = \pm 1)$, то падающую волну запишем в виде

$$\Psi_{01} = A \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_{Ol})] \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_l)],$$

где $\mathbf{r}_{Ol} = \{0, 0, ld\}$ — радиус-вектор, соединяющий точку O с точкой O_l $(l = \pm 1)$. При этом $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_{Ol} = kdl \cos\theta_0$.

Представим потенциал скорости падающей волны в локальных сферических координатах в виде разложения [21]

$$\Psi_{01}(r_l, \theta_l, \varphi_l) = A e^{ikdl\cos\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \gamma_{mn} j_n(kr_l) P_n^m(\cos\theta_l) \cos m(\varphi_l - \varphi_0) \quad (l = \pm 1), \tag{2}$$

где $\gamma_{mn} = (2n+1)(2-\delta_{0m}) i^n \dfrac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_0)$; $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n; $P_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m; δ_{0m} — символ Кронекера.

Потенциал скорости волны, рассеянной двумя шарами, Ψ_{s1} является решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Psi_{s1}(r, \theta, \varphi) + k_1^2 \Psi_{s1}(r, \theta, \varphi) = 0$$

и удовлетворяет условиям излучения на бесконечности [20].

Потенциал Ψ_{s1} будем искать в виде суммы двух слагаемых

$$\Psi_{s1} = \sum_{l=\pm 1} \Psi_{s1}^{(l)}, \tag{3}$$

каждое из которых представляет собой потенциал скорости волны, рассеянной l – ым шаром.

Функции $\Psi_{s1}^{(l)}$ являются решениями уравнений Гельмгольца, которые в локальных сферических координатах имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{s1}^{(l)}}{\partial r_l^2} + \frac{2}{r_l} \frac{\partial \Psi_{s1}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r^2 \sin\theta_l} \frac{\partial}{\partial \theta_l} \left(\sin\theta_l \frac{\partial \Psi_{s1}^{(l)}}{\partial \theta_l} \right) + \frac{1}{r_l^2 \sin^2\theta_l} \frac{\partial^2 \Psi_{s1}^{(l)}}{\partial \varphi_l^2} + k_1^2 \Psi_{s1}^{(l)} = 0, \quad l = \pm 1.$$

С учетом условий излучения на бесконечности функции $\Psi_{s1}^{(l)}$ будем искать в виде

$$\Psi_{s1}^{(l)}(r_l, \theta_l, \varphi_l) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_{mn}^{(l)} h_n(kr_l) P_n^m(\cos\theta_l) \cos m(\varphi_l - \varphi_0), \quad l = \pm 1, \tag{4}$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n; $A_n^{(l)}$ — коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Представим вектор смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ частиц упругого изотропного однородного l – го шара в виде

$$\mathbf{u}_0^{(l)} = \mathrm{grad} L^{(l)} + \mathrm{rot} \mathbf{\Phi}^{(l)}, \quad \mathrm{div} \mathbf{\Phi}^{(l)} = 0,$$

где $L^{(l)}$ и $\mathbf{\Phi}^{(l)}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения в l – ом шаре, которые в случае установившегося режима движения удовлетворяют уравнениям [20]

$$\Delta L^{(l)} + k_l^2 L^{(l)} = 0, \tag{5}$$

$$\Delta \mathbf{\Phi}^{(l)} + k_\tau^2 \mathbf{\Phi}^{(l)} = 0, \tag{6}$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Скалярный потенциал смещения $L^{(l)}$, являющийся решением уравнения (5) в локальной сферической системе координат, при учете условия ограниченности будем искать в виде

$$L^{(l)}(r_l,\theta_l,\varphi_l)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}B_{mn}^{(l)}j_n(kr_l)P_n^m(\cos\theta_l)\cos m(\varphi_l-\varphi_0),\quad l=\pm1. \tag{7}$$

Представим векторный потенциал смещения через две скалярные функции $U^{(l)}$ и $V^{(l)}$ [22]

$$\mathbf{\Phi}^{(l)}=\mathrm{rotrot}(r_lU^{(l)}\mathbf{e}_{r_l})+k_\tau\mathrm{rot}(r_lV^{(l)}\mathbf{e}_{r_l}),$$

где $\mathbf{e}_{r_l}$ — орт сферической координатной оси r_l. В результате вместо векторного уравнения (6) получим два скалярных уравнения Гельмгольца относительно введенных скалярных функций $U^{(l)}$ и $V^{(l)}$

$$\Delta U^{(l)}+k_\tau^2U^{(l)}=0,\quad \Delta V^{(l)}+k_\tau^2V^{(l)}=0.$$

Функции $U^{(l)}$ и $V^{(l)}$ при учете условия ограниченности будем искать в виде

$$U^{(l)}(r_l,\theta_l,\varphi_l)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{mn}^{(l)}j_n(k_\tau r_l)P_n^m(\cos\theta_l)\sin m(\varphi_l-\varphi_0), \tag{8}$$

$$V^{(l)}(r_l,\theta_l,\varphi_l)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}D_{mn}^{(l)}j_n(k_\tau r_l)P_n^m(\cos\theta_l)\cos m(\varphi_l-\varphi_0). \tag{9}$$

D разложениях (4), (7), (8), (9) вид зависимостей от φ_l определяется соображениями симметрии векторов скорости $\mathbf{v}$ и смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ относительно плоскости $\varphi_l=\varphi_0$, $\varphi_0+\pi$ (компоненты v_r, $u_{0r}^{(l)}$, $u_{0\theta}^{(l)}$ симметричны, а компонента $u_{0\varphi}^{(l)}$ антисимметрична).

Компоненты вектора $\mathbf{u}_0^{(l)}$ выражаются через функции $U^{(l)}$ и $V^{(l)}$ следующим образом:

$$\begin{gathered}
u_{0r}^{(l)}=\frac{\partial L}{\partial r_l}+k_\tau\left[\frac{\partial^2}{\partial r_l^2}(r_lV^{(l)})+{k_\tau}^2r_lV^{(l)}\right],\\
u_{0\theta}^{(l)}=\frac{1}{r_l}\frac{\partial L}{\partial\theta_l}+\frac{k_\tau}{r_l}\left[\frac{k_\tau r_l}{\sin\theta_l}\frac{\partial U^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\frac{\partial^2}{\partial r_l\partial\theta_l}(r_lV^{(l)})\right],\\
u_{0\varphi_l}^{(l)}=\frac{1}{r_l\sin\theta_l}\frac{\partial L}{\partial\varphi_l}+\frac{k_\tau}{r_l}\left[\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial^2}{\partial r_l\partial\varphi_l}(r_lV^{(l)})-k_\tau r_l\frac{\partial U^{(l)}}{\partial\theta_l}\right].
\end{gathered} \tag{10}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{0rr}^{(l)}$, $\sigma_{0r\theta}^{(l)}$, $\sigma_{0r\varphi}^{(l)}$ в однородной части l – го шара и компонентами вектора смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ имеют вид [23]:

$$\begin{gathered}
\sigma_{0rr}^{(l)}=(\lambda_0+2\mu_0)\frac{\partial u_{0r}^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{\lambda_0}{r_l}\left(2u_{0r}^{(l)}+\frac{\partial u_{0\theta}^{(l)}}{\partial\theta_l}+u_{0\theta}^{(l)}\operatorname{ctg}\theta_l+\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_{0\varphi}^{(l)}}{\partial\varphi_l}\right),\\
\sigma_{0r\theta}^{(l)}=\mu_0\left(\frac{1}{r_l}\frac{\partial u_{0r}^{(l)}}{\partial\theta_l}-\frac{u_{0\theta}^{(l)}}{r_l}+\frac{\partial u_{0\theta}^{(l)}}{\partial r_l}\right),\quad \sigma_{0r\varphi}^{(l)}=\mu_0\left(\frac{1}{r_l\sin\theta_l}\frac{\partial u_{0r}^{(l)}}{\partial\varphi_l}-\frac{u_{0\varphi}^{(l)}}{r_l}+\frac{\partial u_{0\varphi}^{(l)}}{\partial r_l}\right).
\end{gathered} \tag{11}$$

Используя (10), выразим $\sigma_{0rr}^{(l)}$, $\sigma_{0r\theta}^{(l)}$ и $\sigma_{0r\varphi}^{(l)}$ через функции $L^{(l)}$, $U^{(l)}$ и $V^{(l)}$ с учетом того, что $\Delta L^{(l)}=-k_l^2L^{(l)}$.

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии l – го шара описывается общими уравнениями движения упругой среды, которые для установившегося режима движения в сферической системе координат имеют вид [23]

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{rr}^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{1}{r_l}\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(l)}}{\partial\theta_l}+\frac{1}{r_l\sin\theta_l}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\frac{1}{r_l}\left(2\sigma_{rr}^{(l)}-\sigma_{\theta\theta}^{(l)}-\sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}+\sigma_{r\theta}^{(l)}\operatorname{ctg}\theta_l\right)=-\rho(r_l)\omega^2u_r^{(l)},\\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{1}{r_l}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^{(l)}}{\partial\theta_l}+\frac{1}{r_l\sin\theta_l}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\frac{1}{r_l}[(\sigma_{\theta\theta}^{(l)}-\sigma_{\varphi\varphi}^{(l)})\operatorname{ctg}\theta_l+3\sigma_{r\theta}^{(l)}]=-\rho(r_l)\omega^2u_\theta^{(l)},\\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{1}{r_l}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}^{(l)}}{\partial\theta_l}+\frac{1}{r_l\sin\theta_l}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\frac{1}{r_l}(3\sigma_{r\varphi}^{(l)}+2\sigma_{\theta\varphi}^{(l)}\operatorname{ctg}\theta_l)=-\rho(r_l)\omega^2u_\varphi^{(l)},\end{gathered}\tag{12}$$

где $u_r^{(l)}$, $u_\theta^{(l)}$, $u_\varphi^{(l)}$ и $\sigma_{ij}^{(l)}$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u^{(l)}}$ и тензора напряжений в покрытии l – го шара.

Используя связь компонентов тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука), а также выражения компонентов тензора деформаций через компоненты вектора смещения [23], получаем в сферической системе координат следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}^{(l)}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{\lambda}{r_l}\left(2u_r^{(l)}+\frac{\partial u_\theta^{(l)}}{\partial\theta_l}+u_\theta^{(l)}\operatorname{ctg}\theta_l+\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial\varphi_l}\right),\\ \sigma_{\theta\theta}^{(l)}=\lambda\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{2(\lambda+\mu)}{r_l}u_r^{(l)}+\frac{(\lambda+2\mu)}{r_l}\frac{\partial u_\theta^{(l)}}{\partial\theta_l}+\frac{\lambda}{r_l}\left(u_\theta^{(l)}\operatorname{ctg}\theta_l+\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial\varphi_l}\right),\\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}=\lambda\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{2(\lambda+\mu)}{r_l}u_r^{(l)}+\frac{\lambda}{r_l}\frac{\partial u_\theta^{(l)}}{\partial\theta_l}+\frac{(\lambda+2\mu)}{r_l}\left(u_\theta^{(l)}\operatorname{ctg}\theta_l+\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial\varphi_l}\right),\\ \sigma_{r\theta}^{(l)}=\mu\left(\frac{1}{r_l}\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial\theta_l}-\frac{u_\theta^{(l)}}{r_l}+\frac{\partial u_\theta^{(l)}}{\partial r_l}\right),\quad \sigma_{r\varphi}^{(l)}=\mu\left(\frac{1}{r_l\sin\theta_l}\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial\varphi_l}-\frac{u_\varphi^{(l)}}{r_l}+\frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial r_l}\right),\\ \sigma_{\theta\varphi}^{(l)}=\frac{\mu}{r_l}\left(\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_\theta^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial\theta_l}-u_\varphi^{(l)}\operatorname{ctg}\theta_l\right).\end{gathered}\tag{13}$$

Подставим выражения (13) в (12). Вводя новые функции u_2 и u_3 с помощью соотношений

$$u_\theta^{(l)}=\frac{\partial u_2^{(l)}}{\partial\theta_l}+\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_3^{(l)}}{\partial\varphi_l},\qquad u_\varphi^{(l)}=\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_2^{(l)}}{\partial\varphi_l}-\frac{\partial u_3^{(l)}}{\partial\theta_l},\tag{14}$$

приходим к системе уравнений, записанных относительно функций $u_r^{(l)}$, $u_2^{(l)}$ и $u_3^{(l)}$:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u_r^{(l)}}{\partial r_l^2}+\left[\lambda'+2\mu'+\frac{2(\lambda+2\mu)}{r_l}\right]\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{\mu}{r_l^2}\Omega[u_r^{(l)}]+\\ +\left[\frac{2}{r_l}\left(\lambda'-\frac{\lambda+2\mu}{r_l}\right)+\rho\omega^2\right]u_r^{(l)}+\frac{1}{r_l}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r_l}+\lambda'-\frac{\lambda+3\mu}{r_l}\right]\Omega[u_2^{(l)}]=0,\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{r_l}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r_l}+\mu'+\frac{2(\lambda+2\mu)}{r_l}\right]\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial\theta_l}+\frac{\lambda+2\mu}{r_l^2}\frac{\partial}{\partial\theta_l}\Omega[u_2^{(l)}]+\left[\mu\frac{\partial^2}{\partial r_l^2}+\right.\\ \left.+\left(\mu'+\frac{2\mu}{r_l}\right)\frac{\partial}{\partial r_l}-\frac{\mu'}{r_l}+\rho\omega^2\right]\left(\frac{\partial u_2^{(l)}}{\partial\theta_l}+\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_3^{(l)}}{\partial\varphi_l}\right)+\frac{\mu}{r_l^2\sin\theta_l}\frac{\partial}{\partial\varphi_l}\Omega[u_3^{(l)}]=0,\end{gathered}\tag{16}$$

$$\frac{1}{r_l \sin\theta_l}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r_l}+\mu'+\frac{2(\lambda+2\mu)}{r_l}\right]\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\left[\mu\frac{\partial^2}{\partial r_l^2}+\left(\mu'+\frac{2\mu}{r_l}\right)\frac{\partial}{\partial r_l}-\frac{\mu'}{r_l}+\rho\omega^2\right]\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{\partial u_2^{(l)}}{\partial\varphi_l}-\frac{\partial u_3^{(l)}}{\partial\theta_l}\right)+\frac{\lambda+2\mu}{r_l^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_l}\Omega[u_2^{(l)}]-\frac{\mu}{r_l^2}\frac{\partial}{\partial\theta_l}\Omega[u_3^{(l)}]=0, \tag{17}$$

где

$$\Omega[\quad]=\frac{\partial^2}{\partial\theta_l^2}+\operatorname{ctg}\theta_l\frac{\partial}{\partial\theta_l}+\frac{1}{\sin^2\theta_l}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_l^2}.$$

Штрихами обозначено дифференцирование по радиальной координате r_l.

Проделаем следующие преобразования. Уравнение (16) домножим на $\sin\theta_l$ и продифференцируем по θ_l, а уравнение (17) продифференцируем по φ_l. Складывая полученные уравнения, приходим к уравнению, содержащему только функции $u_r^{(l)}$ и $u_2^{(l)}$:

$$\frac{1}{r_l}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r_l}+\mu'+\frac{2(\lambda+2\mu)}{r_l}\right]\Omega[u_r^{(l)}]+$$

$$+\left[\mu\frac{\partial^2}{\partial r_l^2}+\left(\mu'+\frac{2\mu}{r_l}\right)\frac{\partial}{\partial r_l}-\frac{\mu'}{r_l}+\rho\omega^2+\frac{\lambda+2\mu}{r_l^2}\Omega[\quad]\right]\Omega[u_2^{(l)}]=0. \tag{18}$$

Затем продифференцируем уравнение (16) по φ_l и вычтем уравнение (17), предварительно умноженное на $\sin\theta_l$ и продифференцированное по θ_l. Получим уравнение, в котором присутствует только функция $u_3^{(l)}$:

$$\left[\mu\frac{\partial^2}{\partial r_l^2}+\left(\mu'+\frac{2\mu}{r_l}\right)\frac{\partial}{\partial r_l}-\frac{\mu'}{r}+\rho\omega^2+\frac{\mu}{r_l^2}\Omega[\quad]\right]\Omega[u_3^{(l)}]=0 \tag{19}$$

В результате приходим к системе, состоящей из уравнений (15), (18) и (19).

Функции $u_r^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, $u_3^{(l)}$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(l)}(r_l,\theta_l,\varphi_l)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}U_{1mn}^{(l)}(r_l)P_n^m(\cos\theta_l)\cos m(\varphi_l-\varphi_0),\\ u_2^{(l)}(r_l,\theta_l,\varphi_l)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}U_{2mn}^{(l)}(r_l)P_n^m(\cos\theta_l)\cos m(\varphi_l-\varphi_0),\\ u_3^{(l)}(r_l,\theta_l,\varphi_l)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}U_{3mn}^{(l)}(r_l)P_n^m(\cos\theta_l)\sin m(\varphi_l-\varphi_0). \end{aligned} \tag{20}$$

При этом вид зависимостей от φ_l в этих разложениях определяется соображениями симметрии вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ относительно плоскости $\varphi_l=\varphi_0$, $\varphi_0+\pi$.

Подставим разложения (20) в уравнения (15), (18) и (19).

Воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра [24]

$$\frac{d^2}{d\theta^2}P_n^m(\cos\theta)+\operatorname{ctg}\theta\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_n^m(\cos\theta)=0$$

и свойством ортогональности сферических гармоник [24], получим для каждой пары индексов m,n ($n=0,1,\ldots;m\leqslant n$) систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{jmn}^{(l)}(r_l)$ ($j=1,2,3$):

$$(\lambda+2\mu)U_{1mn}^{(l)''}+b_{11}U_{1mn}^{(l)'}+b_{12}U_{2mn}^{(l)'}+c_{11}U_{1mn}^{(l)}+c_{12}U_{2mn}^{(l)}=0,$$

$$\mu U_{2mn}^{(l)''} + b_{21}U_{1mn}^{(l)'} + b_{22}U_{2mn}^{(l)'} + c_{21}U_{1mn}^{(l)} + c_{22}U_{2mn}^{(l)} = 0, \tag{21}$$

$$\mu U_{3mn}^{(l)''} + b_{33}U_{3mn}^{(l)'} + c_{33}U_{3mn}^{(l)} = 0,$$

где

$$b_{11} = \lambda' + 2\mu' + 2(\lambda + 2\mu)/r_l; \quad b_{12} = -n(n+1)(\lambda + \mu)/r_l;$$

$$b_{21} = (\lambda + \mu)/r_l, \quad b_{22} = b_{33} = (r_l\mu' + 2\mu)/r_l;$$

$$c_{11} = \rho\omega^2 + [2\lambda' r_l - 2(\lambda + 2\mu) - n(n+1)\mu]/r_l^2; \quad c_{12} = n(n+1)(\lambda + 3\mu - r_l\lambda')/r_l^2;$$

$$c_{21} = [r_l\mu' + 2(\lambda + 2\mu)]/r_l^2; \quad c_{22} = \rho\omega^2 - [r_l\mu' + n(n+1)(\lambda + 2\mu)]/r_l^2;$$

$$c_{33} = \rho\omega^2 - [r_l\mu' + n(n+1)\mu]/r_l^2.$$

Анализ системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (21) показывает, что все коэффициенты системы не зависят от индекса m. В третье уравнение системы (21) входит только функция U_{3mn}, причем в первые два уравнения этой системы она не входит.

Искомые функции $\Psi_s^{(l)}$, $L^{(l)}$, $U^{(l)}$, $V^{(l)}$, $u_r^{(l)}$, $u_2^{(l)}$ и $u_3^{(l)}$ $(l = \pm 1)$ должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия l – го шара заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений: при $r_l = r_1$

$$-i\omega u_r^{(l)} = v_{1r}, \quad \sigma_{rr}^{(l)} = -p_1, \quad \sigma_{r\theta}^{(l)} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}^{(l)} = 0; \quad l = \pm 1. \tag{22}$$

На внутренней поверхности покрытия l – го шара должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения: при $r_l = r_0$

$$\begin{gathered} u_r^{(l)} = u_{0r}^{(l)}, \quad u_\theta^{(l)} = u_{0\theta}^{(l)}, \quad u_\varphi^{(l)} = u_{0\varphi}^{(l)}, \\ \sigma_{rr}^{(l)} = \sigma_{0rr}^{(l)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(l)} = \sigma_{0r\theta}^{(l)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(l)} = \sigma_{0r\varphi}^{(l)}; \quad l = \pm 1. \end{gathered} \tag{23}$$

Для нахождения из граничных условий коэффициентов $A_{mn}^{(l)}$, $B_{mn}^{(l)}$, $C_{mn}^{(l)}$, $D_{mn}^{(l)}$ разложений (4), (7-9) и функций $U_{1mn}^{(l)}(r_l)$, $U_{2mn}^{(l)}(r_l)$, $U_{3mn}^{(l)}(r_l)$ в разложениях (20) воспользуемся теоремой сложения для волновых сферических функций, которая позволяет волновую функцию $h_n(kr_l)P_n^m(\cos\theta_l)$, записанную в l – ой локальной системе координат ($l = 1$ либо $l = -1$), выразить через волновые функции, но записанные уже в другой, $(-l)$ – ой системе координат.

Так как начала локальных координатных систем лежат на одной прямой (ось Oz) и их соответствующие координатные оси Ox_l и Oy_l $(l = \pm 1)$ одинаково ориентированы и лежат в одинаковых плоскостях, то азимутальные углы φ_{+1} и φ_{-1} будут равны. В этом случае теорема сложения имеет вид [21]

$$h_n(kr_l)P_n^m(\cos\theta_l) = \sum_{q=m}^{\infty} Q_{mqmn}^{(l,-l)} j_q(kr_{-l}) P_q^m(\cos\theta_{-l}); \quad 2d > r_{-l}, \tag{24}$$

где

$$Q_{mqmn}^{(l,-l)} = i^{q-n}(2n+1)\frac{(q-m)!}{(q+m)!}\sum_{\sigma=|q-n|}^{q+n} i^\sigma b_\sigma^{(nmqm)} h_\sigma(kr_{l,-l}) P_\sigma(\cos\theta_{l,-l}).$$

Здесь через $r_{l,-l}$, $\theta_{l,-l}$, $\varphi_{l,-l}$ обозначены сферические координаты начала O_{-l} $(-l)$ – ой локальной системы координат в l – ой локальной системе координат с началом в O_l. Коэффициенты $b_\sigma^{(nmqm)}$ выражаются через коэффициенты Клебша – Гордана [21].

Подставим разложения (2), (4), (7)–(9) и (20) в граничные условия (22) и (23) с учетом выражений (3), (10), (11), (13), (14) и (24).

Из первого и второго граничных условий (22) получаем две бесконечные системы уравнений для определения коэффициентов $A_{mn}^{(l)}$:

$$A_{mn}^{(l)} + \sum_{q=m}^{\infty} \alpha_{jmnq}^{(-l,l)} A_{mq}^{(-l)} = F_{jmn}^{(l)}; \quad j=1,2 \quad (n=m,m+1,\ldots;m=0,1,2,\ldots; \quad l=\pm 1), \quad (25)$$

где $\alpha_{1mnq}^{(-l,l)} = \dfrac{j_n'(kr_1)}{h_n'(kr_1)} Q_{mnmq}^{(l,-l)}; \quad F_{1mn}^{(l)} = -A\gamma_{mn} \dfrac{j_n'(kr_1)}{h_n'(kr_1)} e^{ikdl\cos\theta_0} - \dfrac{i\omega U_{1mn}^{(l)}(r_1)}{kh_n'(kr_1)};$

$$\alpha_{2mnq}^{(-l,l)} = \frac{j_n(kr_1)}{h_n(kr_1)} Q_{mnmq}^{(l,-l)}; \quad F_{2mn}^{(l)} = -A\gamma_{mn} \frac{j_n(kr_1)}{h_n(kr_1)} e^{ikdl\cos\theta_0} +$$

$$+ \frac{i}{\rho_1 \omega h_n(kr_1)} \left[(\lambda(r_1) + 2\mu(r_1))\, U_{1mn}^{(l)\prime}(r_1) + \frac{2\lambda(r_1)}{r_1} U_{1mn}^{(l)}(r_1) - \frac{\lambda(r_1)}{r_1} n(n+1) U_{2mn}^{(l)}(r_1) \right];$$

штрихи означают дифференцирование по аргументу функций.

При выводе (25) использовалось уравнение для присоединенных многочленов Лежандра и свойство ортогональности сферических гармоник.

Решение бесконечной системы линейных уравнений может быть найдено методом усечения. Приближенные значения неизвестных находятся с заданной точностью путем сопоставления последовательных решений конечных систем, получаемых из бесконечной системы ее усечением с различными возрастающими значениями порядка усечения N. При порядке усечения N для каждого m необходимо решить $N+1$ систем уравнений, состоящих из $2(N-m+1)$ линейных уравнений с $2(N-m+1)$ неизвестными $A_{mn}^{(+1)}$ и $A_{mn}^{(-1)}$.

Понизим вдвое порядок систем при порядке усечения N без усложнения вычислений их матричных элементов и правых. Учитывая, что $r_{+1,-1} = r_{-1,+1} = 2d, \quad \theta_{-1,+1} = 0, \quad \theta_{+1,-1} = \pi$ и $Q_{mnmq}^{(-l,l)} = (-1)^{n+q} Q_{mnmq}^{(l,-l)}$ [21], получаем

$$\alpha_{jmnq}^{(-1,1)} = (-1)^n \alpha_{jmnq}^{(1,-1)} = \alpha_{jmnq} \quad (j=1,2).$$

Тогда усеченные системы (25) принимают вид

$$A_{mn}^{(+1)} + \sum_{q=m}^{N} \alpha_{jmnq} A_{mq}^{(-1)} = F_{jmn}^{(+1)},$$

$$A_{mn}^{(-1)} + \sum_{q=m}^{N} (-1)^{n+q} \alpha_{jmnq} A_{mq}^{(+1)} = F_{jmn}^{(-1)}; \quad j=1,2.$$

Умножим второе уравнение системы на $(-1)^n$, и осуществим почленное сложение и вычитание уравнений полученной системы. В результате приходим к двум независимым системам линейных уравнений порядка $(N-m+1)$ для каждого m $(m=0,1,\ldots,N)$

$$\begin{gathered} \sum_{q=m}^{N} [\delta_{nq} + (-1)^q \alpha_{jmnq}] x_{mq} = X_{jmn}, \\ \sum_{q=m}^{N} [(\delta_{nq} - (-1)^q \alpha_{jmnq}] y_{mq} = Y_{jmn} \end{gathered} \quad (26)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, N; \quad n = m, m+1, \dots, N; \quad j = 1, 2)$$

с неизвестными $x_{mn} = A_{mn}^{(+1)} + (-1)^n A_{mn}^{(-1)}, \quad y_{mn} = A_{mn}^{(+1)} - (-1)^n A_{mn}^{(-1)}$
и правыми частями $X_{jmn} = F_{jmn}^{(+1)} + (-1)^n F_{jmn}^{(-1)}, \quad Y_{jn} = F_{jmn}^{(+1)} - (-1)^n F_{jmn}^{(-1)}$,
где δ_{nm} — символ Кронекера.

Тогда

$$A_{mn}^{(+1)} = (x_{mn} + y_{mn})/2, \quad A_{jmn}^{(-1)} = (-1)^n (x_{mn} - y_{mn})/2. \tag{27}$$

В матричном виде системы (26) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{jx}\mathbf{x} &= \mathbf{E}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} + \overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} + \overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} + \overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}, \\
\mathbf{R}_{jy}\mathbf{y} &= \overline{\mathbf{E}}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} - \overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} - \overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} - \overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'},
\end{aligned} \tag{28}$$

где $\mathbf{R}_{jx} = (\delta_{nq} + (-1)^m \alpha_{jmnq})_{(N-m+1)\times(N-m+1)}; \quad \mathbf{R}_{jy} = (\delta_{nq} - (-1)^m \alpha_{jmnq})_{(N-m+1)\times(N-m+1)}$;

$$\mathbf{x} = (x_m, x_{(m+1)}, \dots, x_N)^T; \quad \mathbf{y} = (y_m, y_{(m+1)}, \dots, y_N)^T;$$

$$\mathbf{E}_j = \left(E_{jmm}, E_{jm(m+1)}, \dots, E_{jmN}\right)^T; \ \overline{\mathbf{E}}_j = \left(\overline{E}_{jmm}, \overline{E}_{jm(m+1)}, \dots, \overline{E}_{jmN}\right)^T;$$

$$\mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} = \left(g_{jm}U_{1mm}^{(+1)}(r_1), g_{j(m+1)}U_{1m(m+1)}^{(+1)}(r_1), \dots, g_{jN}U_{1mN}^{(+1)}(r_1)\right)^T;$$

$$\overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} = \left(\overline{g}_{jm}U_{1mm}^{(-1)}(r_1), \overline{g}_{j(m+1)}U_{1m(m+1)}^{(-1)}(r_1), \dots, \overline{g}_{jN}U_{1mN}^{(-1)}(r_1)\right)^T;$$

$$\mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} = \left(s_{jm}U_{2mm}^{(+1)}(r_1), s_{j(m+1)}U_{2m(m+1)}^{(+1)}(r_1), \dots, s_{jN}U_{2mN}^{(+1)}(r_1)\right)^T;$$

$$\overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} = \left(\overline{s}_{jm}U_{2mm}^{(-1)}(r_1), \overline{s}_{j(m+1)}U_{2m(m+1)}^{(-1)}(r_1), \dots, \overline{s}_{jN}U_{2mN}^{(-1)}(r_1)\right)^T;$$

$$\mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} = \left(t_{jm}U_{1mm}^{(+1)'}(r_1), t_{j(m+1)}U_{1m(m+1)}^{(+1)'}(r_1), \dots, t_{jN}U_{1mN}^{(+1)'}(r_1)\right)^T;$$

$$\overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'} = \left(\overline{t}_{jm}U_{1mm}^{(-1)'}(r_1), \overline{t}_{j(m+1)}U_{1m(m+1)}^{(-1)'}(r_1), \dots, \overline{t}_{jN}U_{1mN}^{(-1)'}(r_1)\right)^T;$$

$$E_{jmn} = e_{jmn}^{(+1)} + (-1)^n e_{jmn}^{(-1)}; \quad \overline{E}_{jmn} = e_{jmn}^{(+1)} - (-1)^n e_{jmn}^{(-1)};$$

$$e_{1mn}^{(l)} = -A\gamma_{mn}\frac{j_n'(kr_1)}{h_n'(kr_1)}e^{ikdl\cos\theta_0}; \quad e_{2mn}^{(l)} = -A\gamma_{mn}\frac{j_n(kr_1)}{h_n(kr_1)}e^{ikdl\cos\theta_0} \quad (l = \pm 1);$$

$$\overline{g}_{jn} = (-1)^n g_{jn}; \quad \overline{s}_{jn} = (-1)^n s_{jn}; \quad \overline{t}_{jn} = (-1)^n t_{jn} \quad (j = 1, 2);$$

$$g_{1n} = -\frac{i\omega}{kh_n'(kr_1)}; \quad g_{2n} = \frac{2i\lambda(r_1)}{r_1\rho_1\omega h_n(kr_1)}; \quad s_{1n} = 0; \quad s_{2n} = -\frac{n(n+1)\lambda(r_1)}{r_1\rho_1\omega h_n(kr_1)};$$

$$t_{1n} = 0; \quad t_{2n} = \frac{i[\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)]}{\rho_1\omega h_n(kr_1)} \quad (n = m, \pm m+1, \dots, \pm N).$$

Найдем решения систем (28) методом обратной матрицы:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{R}_{jx})^{-1}\left(\mathbf{E}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} + \overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} + \overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} + \overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}\right),$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{R}_{jy})^{-1}\left(\overline{\mathbf{E}}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} - \overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} - \overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} - \overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}\right).$$

Запишем в в координатной форме последние два выражения, обозначая через r_{jmnq}^x и r_{jmnq}^y элементы обратных матриц $(R_{jx})^{-1}$ и $(R_{jy})^{-1}$ соответственно.

На основании формул (27) находим выражения для коэффициентов $A_{mn}^{(l)}$ $(l = \pm 1)$.

Получаем при $j = 1$

$$A_{mn}^{(l)} = \frac{l^n}{2} \sum_{q=m}^{N} \left[(r_{1mnq}^x E_{1mq} + l r_{1mnq}^y \overline{E}_{1mq}) + r_{1mnq}^{(l)} g_{1q} U_{1mq}^{(+1)}(r_1) + r_{1mnq}^{(-l)} \overline{g}_{1q} U_{1mq}^{(-1)}(r_1) \right] \tag{29}$$

и при $j = 2$

$$A_{mn}^{(l)} = \frac{l^n}{2} \sum_{q=m}^{N} \Big\{ (r_{2mnq}^x E_{2mq} + l r_{2mnq}^y \overline{E}_{2mq}) +$$

$$+ r_{2mnq}^{(l)} \left[g_{2q} U_{1mq}^{(+1)}(r_1) + s_{2q} U_{2mq}^{(+1)}(r_1) + t_{2q} U_{1mq}^{(+1)'}(r_1) \right] +$$

$$+ r_{2mnq}^{(-l)} \left[\overline{g}_{2q} U_{1mq}^{(-1)}(r_1) + \overline{s}_{2q} U_{2mq}^{(-1)}(r_1) + \overline{t}_{2q} U_{1mq}^{(-1)'}(r_1) \right] \Big\} \quad (n = m, m+1, \ldots, N), \tag{30}$$

где $r_{jmnq}^{(l)} = (r_{jmnq}^x + l r_{jmnq}^y)$; $\quad r_{jmnq}^{(-l)} = (r_{jmnq}^x - l r_{jmnq}^y) \quad (j = 1, 2)$.

Приравнивая правые части уравнений (29) и (30), получаем одно из шести краевых условий для нахождения частного решения системы (21)

$$\sum_{q=m}^{N} \Big[(r_{1mnq}^x E_{1mq} + l r_{1mnq}^y \overline{E}_{1mq}) - (r_{2mmq}^x E_{2mq} + l r_{2mnq}^y \overline{E}_{2mq}) + \left(r_{1mnq}^{(l)} g_{1q} - r_{2mnq}^{(l)} g_{2q} \right) U_{1mq}^{(+1)} +$$

$$+ \left(r_{1mnq}^{(-l)} \overline{g}_{1q} - r_{2mnq}^{(-l)} \overline{g}_{2q} \right) U_{1mq}^{(-1)} + \left(r_{1mnq}^{(l)} s_{1q} - r_{2mnq}^{(l)} s_{2q} \right) U_{2mq}^{(+1)} + \left(r_{1mnq}^{(-l)} \overline{s}_{1m} - r_{2mnq}^{(-l)} \overline{s}_{2q} \right) U_{2mq}^{(-1)} +$$

$$+ \left(r_{1mnq}^{(l)} t_{1q} - r_{2mnq}^{(l)} t_{2q} \right) U_{1mq}^{(+1)'} + \left(r_{1mnq}^{(-l)} \overline{t}_{1q} - r_{2mnq}^{(-l)} \overline{t}_{2q} \right) U_{1mq}^{(-1)'} \Big]_{r_l = r_1} = 0 \qquad (l = \pm 1). \tag{31}$$

Из первых трех граничных условий (23) найдем коэффициенты $B_{mn}^{(l)}$, $C_{mn}^{(l)}$ и $D_{mn}^{(l)}$, выраженные через величины $U_{jmn}^{(l)}(r_0)$ $(j = 1, 2, 3)$.

Из первого граничного условия (23) получаем уравнение

$$\alpha_{1n} B_{mn}^{(l)} + \alpha_{2n} D_{mn}^{(l)} = U_{1mn}^{(l)}(r_0), \tag{32}$$

где

$$\alpha_{1n} = k_l j_n'(k_l r_0); \quad \alpha_{2n} = k_\tau^2 [k_\tau r_0 j_n''(k_\tau r_0) + 2 j_n'(k_\tau r_0) + k_\tau r_0 j_n(k_\tau r_0)].$$

Из второго и третьего граничных условий (23) получаем два уравнения, которые преобразуем следующим образом. Сначала первое из них умножим на $\sin\theta$, продифференцируем по θ и сложим со вторым уравнением, умноженным на m. Получаем уравнение

$$\alpha_{3n} B_{mn}^{(l)} + \alpha_{4n} D_{mn}^{(l)} = U_{2mn}^{(l)}(r_0), \tag{33}$$

где

$$\alpha_{3n} = j_n(k_l r_0)/r_0, \quad \alpha_{4n} = k_\tau [j_n(k_\tau r_0)/r_0 + k_\tau j_n'(k_\tau r_0)].$$

Затем первое уравнение умножим на m и сложим со вторым уравнением, предварительно умноженным на $\sin\theta$ и продифференцированным по θ. В результате находим

$$C_{mn}^{(l)} = \frac{U_{3mn}(r_0)}{k_\tau^2 j_n(k_\tau r_0)}. \tag{34}$$

Из системы уравнений (32) и (33) находим

$$B_{mn}^{(l)} = \beta_{1n} U_{1mn}^{(l)}(r_0) + \beta_{2n} U_{2mn}^{(l)}(r_0), \quad D_{mn} = \beta_{3n} U_{1mn}^{(l)}(r_0) + \beta_{4n} U_{2mn}^{(l)}(r_0), \tag{35}$$

где

$$\beta_{1n} = \frac{\alpha_{4n}}{\Delta}; \quad \beta_{2n} = -\frac{\alpha_{2n}}{\Delta}; \quad \beta_{3n} = -\frac{\alpha_{3n}}{\Delta}; \quad \beta_{4n} = \frac{\alpha_{1n}}{\Delta}; \quad \Delta = \alpha_{1n}\alpha_{4n} - \alpha_{2n}\alpha_{3n}.$$

Заметим, что неизвестные коэффициенты $A_{mn}^{(l)}$, $B_{mn}^{(l)}$, $C_{mn}^{(l)}$ и $D_{mn}^{(l)}$ разложений (4), (7)-(9) можно вычислить по формулам (29), (34) и (35) лишь после определения полей смещений в неоднородных покрытиях шаров.

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получим пять краевых условий, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (21). При этом будем использовать уравнение и условия ортогональности для присоединенных полиномов Лежандра, а также выражение для вронскиана [24]

$$j_n(x)h_n'(x) - j_n'(x)h_n(x) = i/x^2.$$

Кроме того, при выводе краевых условий из последних двух граничных условий (22) и последних двух граничных условий (23) будем выполнять преобразования каждой пары уравнений, аналогичные проведенным при получении уравнений (33) и (34).

В результате с учетом выражений для коэффициентов $B_{mn}^{(l)}$, $C_{mn}^{(l)}$ и $D_{mn}^{(l)}$ получаем следующие краевые условия:

$$\begin{gathered}
[\mu U_{2mn}^{(l)\prime} + \frac{\mu}{r_l} U_{1mn}^{(l)} - \frac{\mu}{r_l} U_{2mn}^{(l)}]_{r_l=r_1} = 0, \\
[\mu U_{3mn}^{(l)\prime} - \frac{\mu}{r_l} U_{3mn}^{(l)}]_{r_l=r_1} = 0, \\
[(\lambda+2\mu) U_{1mn}^{(l)\prime} + f_{11} U_{1mn}^{(l)} + f_{12} U_{2mn}^{(l)}]_{r_l=r_0} = 0, \\
[\mu U_{2mn}^{(l)\prime} + f_{21} U_{1mn}^{(l)} + f_{22} U_{2mn}^{(l)}]_{r_l=r_0} = 0, \\
[\mu U_{3mn}^{(l)\prime} + f_{33} U_{3mn}^{(l)}]_{r_l=r_0} = 0,
\end{gathered} \tag{36}$$

где

$$f_{11} = 2\lambda/r - \beta_{1n}g_{1n} - \beta_{3n}g_{2n}; \quad f_{12} = -\lambda n(n+1)/r - \beta_{2n}g_{1n} - \beta_{4n}g_{2n};$$

$$f_{21} = \mu/r - \mu_0(\beta_{1n}g_{3n} + \beta_{3n}g_{4n}); \quad f_{22} = \mu/r - \mu_0(\beta_{2n}g_{3n} + \beta_{4n}g_{4n}); \quad f_{33} = -\mu/r - \mu_0 g_{5n}/j_n(k_\tau r);$$

$$g_{1n} = (\lambda_0 + 2\mu_0)k_l^2 j_n''(k_l r) + 2\lambda_0 k_l j_n'(k_l r)/r - \lambda_0 n(n+1) j_n(k_l r)/r^2;$$

$$g_{2n} = \lambda_0 k_\tau^3 [k_\tau r j_n'''(k_\tau r) + 5 j_n''(k_\tau r) + k_\tau r j_n'(k_\tau r) + 3 j_n(k_\tau r)] +$$

$$+ 2\mu_0 k_\tau^3 [k_\tau r j_n'''(k_\tau r) + 3 j_n''(k_\tau r) + k_\tau r j_n'(k_\tau r) + j_n(k_\tau r)] - \lambda_0 n(n+1) k_\tau j_n(k_\tau r)/r^2;$$

$$g_{3n} = 2[k_l j_n'(k_l r) - j_n(k_l r)/r]/r;$$

$$g_{4n} = k_\tau [2k_\tau^2 j_n''(k_\tau r) + 2k_\tau j_n'(k_\tau r)/r + (k_\tau^2 - 2/r^2) j_n(k_\tau r)]; \quad g_{5n} = k_\tau j_n'(k_\tau r) - j_n(k_\tau r)/r.$$

Функция $U_{3mn}^{(l)}(r_l)$ не связана с функциями $U_{1mn}^{(l)}(r_l)$ и $U_{2mn}^{(l)}(r_l)$ не только в уравнениях системы (21), но и в краевых условиях (31) и (36). Так как дифференциальное уравнение и краевые условия для нахождения функции $U_{3mn}^{(l)}(r_l)$ однородны, то отсюда следует, что $U_{3mn}^{(l)}(r_l) \equiv 0$. Тогда $C_{mn}^{(l)} = 0$.

В результате получаем, что $u_3^{(l)}(r_l, \theta_l, \varphi_l) \equiv 0$ и $U^{(l)}(r_l, \theta_l, \varphi_l) \equiv 0$.

Таким образом, для определения полей смещения в неоднородных покрытиях шаров необходимо решить краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящей из первых двух уравнений (21), с краевыми условиями (31) и первым, третьим и четвертым условиями (36).

Для каждого m ($m = 0, 1, \ldots, N$) и $n = m, m+1, \ldots, N$ эта краевая задача может быть решена разными методами, например, методом сведения ее к задачам с начальными условиями [6,8] или методом сплайн-коллокации [7].

Затем, используя значения $U^{(l)}_{1mn}(r_1)$, по формуле (29) вычисляются коэффициенты $A^{(l)}_{mn}$ $(l = \pm 1)$.

В результате на основании (3) и (4) получаем аналитическое описание акустического поля, рассеянного шарами

$$\Psi_{s1} = \sum_{l=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A^{(l)}_{mn} h_n(kr_l) P_n^m(\cos\theta_l) \cos m(\varphi_l - \varphi_0). \tag{37}$$

5. Заключение

Используя решение дифракционной задачи в случае, когда падающая плоская волна имеет потенциал скорости Ψ_{01}, запишем решение задачи дифракции плоской волны с потенциалом скорости Ψ_{02}. Для этого в полученном выше решении достаточно заменить компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_1$ на компоненты вектора $\mathbf{k}_2$, если подстилающая плоскость является акустически жесткой, и дополнительно заменить амплитуду A на $-A$, если плоскость - акустически мягкая.

При этом потенциал скорости второй падающей волны в локальных сферических координатах представляется разложением

$$\Psi_{02}(r_l, \theta_l, \varphi_l) = \pm A e^{-ikdl\cos\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \gamma_{mn} j_n(kr_l) P_n^m(\cos\theta_l) \cos m(\varphi_l - \varphi_0) \quad (l = \pm 1).$$

Суммируя результаты решения двух дифракционных задач, получаем решение задачи дифракции плоской звуковой волны с потенциалом скорости Ψ_{01} на упругом шаре с покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности. Потенциал скорости рассеянной волны определяется выражением

$$\Psi_s = \Psi_{02} + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, № 4. P. 405-418.

2. Junger M. C. Sound scattering by thin elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. Vol. 24, № 4. P. 366-373.

3. Flax L., Varadan V. K., Varadan V. V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, № 6. P. 1832-1835.

4. Goodman R. D., Stern R. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. Vol. 34, № 3. P. 338-344.

5. Толоконников Л. А., Филатова Ю. М. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической полостью // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 114-122.

6. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Акустический журн. 1995. Т.41, № 6. С. 917-923.

7. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем // Прикладная математика и механика. 2010. Т.74, вып. 4. С. 645-654.

8. Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 519-526.

9. Толоконников Л. А., Родионова Г. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 131-137.

10. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 5. С. 663-673.

11. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 181-193.

12. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 11. С. 89-98.

13. Толоконников Л.А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 6. С. 699-707.

14. Gaunaurd G. C., Huang H. Acoustic scattering by spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. Vol. 96, № 4. P. 2525-2536.

15. Gaunaurd G. C., Huang H. Sound scattering be a apherical object near a hard flat bottom // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1996. Vol. 43. P. 690-700.

16. Bishop C. G., Smith J. Scattering from an elastic shell and a rough fluid-elastic interface: Theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. Vol. 101, № 2. P. 767-788.

17. Bishop C. G., Smith J. Scattering from rigid and soft targets near a planar boundary: Numerical results // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. Vol. 105, № 1. P. 130-143.

18. Li K. M., Lui W. K. The diffraction of sound by an impedance sphere in the vicinity of a ground surface // J. Acoust. Soc. Amer. 2004. Vol. 115, № 1. P. 43-56.

19. Шендеров Е. Л. Дифракция звука на упругой или импедансной сфере, расположенной вблизи импедансной или упругой границы полупространства // Акустический журн. 2002. Т. 48, № 5. С. 684-694.

20. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

21. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

22. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.

23. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

24. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no 4, pp. 405-418.

2. Junger, M. C. 1952, “Sound scattering by thin elastic shells”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 24, no 4, pp. 366-373.

3. Flax, L., Varadan, V. K. & Varadan, V. V. 1980, “Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68, no 6, pp. 1832-1835.

4. Goodman, R. D. & Stern, R. 1962, “Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 34, no 3, pp. 338-344.

5. Tolokonnikov, L. A. & Filatova, Yu. M. 2010, “Diffraction of a plane acoustic wave by an elastic sphere with any way located spherical cavity”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 114-122 [in Russian].

6. Skobel’tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, “Sound scattering by an inhomogeneous transversaly isotropic spherical layer”, *Acoustical Physics*, vol. 41, no 6, pp. 812-818.

7. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2010, “Scattering of sound by an inhomogeneous thermo-elastic spherical layer”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 74, no. 4, pp. 460-466.

8. Tolokonnikov, L. A. 2014, “The scattering of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 78, no. 4, pp. 367-373.

9. Tolokonnikov, L. A. & Rodionova, G. A. 2014, “Diffraction of a spherical acoustic wave by an elastic sphere with a non-uniform covering”,*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 131-137 [in Russian].

10. Tolokonnikov, L. A. 2015, “Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic sphere with an inhomogeneous coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no. 5, pp. 467-474.

11. Tolokonnikov, L. A. 2014, “Diffraction of a plane acoustic wave by an elastic sphere with a non-uniform covering and arbitrarily situated spherical vacuity”,*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 181-193 [in Russian].

12. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel’tsyn,S. A. 2018, “Modeling an inhomogeneous coating of an elastic sphere with the required sound reflecting properties”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 10, no. 3, pp. 333-340.

13. Tolokonnikov, L. A. 2017, “Modelling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere by a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound scattering”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 81, no. 6.

14. Gaunaurd, G. C. & Huang, H. 1994, “ Acoustic scattering by spherical body near a plane boundary”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 96, no 4, pp. 2525-2536.

15. Gaunaurd, G. C. & Huang, H. 1996, “Sound scattering be a apherical object near a hard flat bottom”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* , vol. 43, pp. 690-700.

16. Bishop, C. G. & Smith, J. 1997, “Scattering from an elastic shell and a rough fluid-elastic interface: Theory”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 101, no 2, pp. 767-788.

17. Bishop, C. G. & Smith, J. 1999, “Scattering from rigid and soft targets near a planar boundary: Numerical results”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 105, no 1, pp. 130-143.

18. Li, K. M., Lui, W. K. 2004, “The diffraction of sound by an impedance sphere in the vicinity of a ground surface”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 115, no 1, pp. 43-56.

19. Shenderov, E. L. 2002, “Diffraction of sound by an elastic or impedance sphere located near an impedance or elastic boundary of a halfspace”, *Acoustical Physics*, vol. 48, no 5, pp. 607-617.

20. Shenderov, E. L. 1972, *“Wave problems of underwater acoustics”*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].

21. Ivanov, E. A. 1968, *“Diffraction of electromagnetic waves by two bodies”*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p. [in Russian].

22. Mors, F. M., Feshbah H. 1953, *“Methods of Theoretical Physics”*. Vol. 2., McGraw-Hill, New York.

23. Nowacki, W.1973, *“Teoria sprezystosci”*, PWN, Warszawa.

24. Lebedev, N. N. 1963, *“Special Functions and their Applications”*, Fizmatgiz, Moscow, 358 p.[in Russian].

Получено 13.06.2018
Принято в печать 17.08.2018